Midtoets Lineaire Algebra, vrijdag 9 december 2005

De toets bestaat uit 4 vraagstukkken. U krijgt 120 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Voor een gegeven geheel getal n is $P_n(\mathbb{R})$ de vectorruimte over $\mathbb{R}$ van alle polynomen van graad hoogstens n, met reële coefficienten. Een polynoom $p(x)$ heet *oneven* indien voor all x geldt $p(x) = -p(-x)$. Laat $O_n(\mathbb{R})$ de deelverzameling van $P_n(\mathbb{R})$ zijn bestaande uit de oneven polynomen van graad hoogstens n.

- **a.** Laat zien dat $O_n(\mathbb{R})$ een deelruimte is van $P_n(\mathbb{R})$.
- **b.** Lat nu $n = 3$. Stel $p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3$ een willekeurige vector in $O_3(\mathbb{R})$. Toon aan dat $p_0 = p_2 = 0$.
- **c.** Bepaal een basis van $O_3(\mathbb{R})$.
- **d.** Bepaal de dimensie van $O_3(\mathbb{R})$.

2. Beschouw de afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$T(x, y) = (x + y, x - y).$$

- **a.** Toon aan dat T een lineaire afbeelding is.
- **b.** Bepaal de nulruimte $N(T)$.
- **c.** Bepaal de beeldruimte $R(T)$.
- **d.** Toon aan dat T inverteerbaar is.
- **e.** Bepaal T^{-1}.
- **f.** Bepaal de matrix van T ten opzichte van de standaard geordende basis van $\mathbb{R}^2$.

3. Stel $\mathcal{V}$ een vectorruimte over $\mathbb{R}$. Noteer de nulvector in $\mathcal{V}$ door 0. Stel $\mathcal{W}$ een deelverzameling van $\mathcal{V}$. Toon aan dat $\mathcal{W}$ een *deelruimte* is van $\mathcal{V}$ dan en slechts dan als als de volgende twee voorwaarden gelden:

(i) $0 \in \mathcal{W}$,

(ii) Voor elke $c \in \mathbb{R}$ en elk tweetal vectoren $x, y \in \mathcal{W}$ geldt: $x + cy \in \mathcal{W}$.

4. Stel $\mathcal{V}$ een vectorruimte en $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ een lineaire afbeelding. Laat T^2 de lineaire afbeelding zijn die gedefinieerd wordt door $T^2(x) = T(T(x))$.

a. Toon aan dat $R(T^2) \subseteq R(T)$.

b. Toon aan dat $N(T) \subseteq N(T^2)$.

c. Stel dat $\mathrm{rank}(T^2) = \mathrm{rank}(T)$. Toon aan dat $N(T) = N(T^2)$.

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 24
Vraagstuk 2: 24
Vraagstuk 3: 21
Vraagstuk 4: 21